AJMAS
https://journal.utripoli.edu.ly/index.php/Alqalam/index eISSN 2707-7179

Original article

Comparison of Cauchy's Integral Formula and the Residual Theorem to Find the Integral Value of Complex Functions

Aml Ali

Department of Mathematics, Faculty of Education, University of Zawia, Zawia, Libya

ARTICLE INFO

Corresponding Email. *am.abdullah@zu.edu.ly*

Received: *12-11-2023*
Accepted: *22-12-2023*
Published: *29-12-2023*

Keywords. *Complex Function, Cauchy's Integral Theorem, Residual Theorem, Laurent's Series, Poles.*

ABSTRACT

This research focuses on the integration of complex function and explores methods for solving them through Cauchy's integral theorem. The theorem fundamentally depends on whether the function being integrated is analytic. If the function is analytic on and inside any closed curve then. However, the key question arises: what is the value of the integral if the function is not analytic and has an isolated singularity at appoint and closed curve lies entirely within a circle centered at this point, the integral of the function around C can be determined using cauchy's integral formula and the residue theorem. This study gathered data from books, international references, and academic journals the findings confirm that the residue theorem serves as a generalization of cauchy's theorem, encompassing various cases: A-Cauchy's and Cauchy-Goursat theorems, which apply when the function is analytic then. B-Cauchy's hntegral formula and its ertension via the vesidue theorem, which handle situations where the function has a finite number of isolated singularities. When multiple poles are present, Cauchy's integral theorem may not be directly applicable, but the residue theorem can be used to solve the integral.

Cite this article. *Ali A. Comparison of Cauchy's Integral Formula and the Residual Theorem to Find the Integral Value of Complex Functions. Alq J Med App Sci. 2023;6(2):903-911.* https://doi.org/10.5281/zenodo.1044519

AJMAS

https://journal.utripoli.edu.ly/index.php/Alqalam/index eISSN 2707-7179

بحث اصلي

المقارنة لايجاد قيمة التكامل للدوال المركبة بين صيغتا كوشي التكاملية و نظرية البواقي

أمل علي

كلية التربية أبو عيسي، جامعة الزاوية ، ليبيا

المستخلص

هذا البحث يهتم بدراسة تكامل الدوال المركبة و طرق حلها باستخدام نظرية كوشى للتكامل المحدد ,هذه النظرية تعتمد في أساسها على كون الدالة المكاملة تحليلية أم لا, اذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية على و داخل أى منحنى مغلق c فان $\oint_c f(z)dz = 0$, غير أن السؤال المهم ما قيمة التكامل اذا كانت الدالة المكاملة ليست تحليلية و كانت للدالة $f(z)$ نقطة شاذة معزولة عند النقطة $z = a$ و المنحنى المغلق c يقع بكامله داخل دائرة مركزها هذه النقطة فيمكن ايجاد قيمة التكامل للدالة $f(z)$ حول المنحنى c باستخدام صيغتا كوشي التكاملية و نظرية البواقي , و اعتمدت هذه الدراسة علي جمع البيانات من الكتب و المراجع الدولية و المجلات البحثية و التي توصلنا الى نتائج تؤكد أن النظرية الاساسية للبواقي تمثل صورة عامة لنظرية كوشي حيث أنها تشمل جميع الحالات: أ-نظرية كوشي و كوشي جورسات, أي الحالة التي تكون فيها الدالة المكاملة تحليلية و بالتالي $\operatorname{Re}s(f) = 0$. ب-صيغة تكامل كوشي و تعميمها, أو النظرية الاساسية للبواقي أي الحالة التي يكون فيها الدالة المكاملة عدد منتهي من النقاط الشاذة المعزولة. اذا تعددت الاقطاب في هذه الحالة لايمكن تطبيق تكامل كوشي مباشرة و أحيانا لا نستطيع تطبيقها , بينما يمكن تطبيق نظرية البواقي.

المقدمة

يعتبر موضوع التكامل في نظرية المتغيرات المركبة أحد المواضيع التي لعبت دورا كبيرا في تطور التحليل المركب و تطبيقاته, و أن مفهوم قابليته للاشتقاق بالمعنى المركب جعل من هذه التكاملات تختلف عن التكاملات في نظرية المتغيرات الحقيقية .

تعتبر نظرية المتغيرات المركبة من النظريات قريبة العهد حيث انها في القرنين الثامن عشر و التاسع عشرشهدت حركة دخول موضوعاتها في الكثير من الموضوعات التطبيقية كالفيزياء و الهندسة من خلال أعمال عدد من الرياضيين مثل (Casper) في عام 1797 ,و تبعه جيان روبيرت أرجاند (Jean Robert Argand) في عام 1806,و كارل فريدريش جاوس(Karl Friedrich Gauss) في عام 1831. [1]

و في عام 1825 قدم كوشي أهم النظريات في نظرية المتغيرات المركبة التي سميت باسمه و تمت برهنتها عام 1830 باستخدام من نظريات التحويل و هى نظرية جرين, ثم تعميمها علي منحنيات لمناطق متعددة الترابط . [2]

و في عام 1883 قام عالم الرياضيات الفرنسي (Edouard Goursat) برهنة أن فرض استمرارية الدالة المكاملة ليس بالشرط الضروري للوصول الي النتيجة التي توصل اليها كوشي,لذلك تم تحوير نظرية كوشي و ظهرت نظرية كوشي جورسات,و لعل أهم نتيجة اسهمت في هذا الموضوع هو امكانية التعبير عن الدوال التحليلية علي شكل متسلسلات متقاربة و تحديدا ظهور مايسمي بمتسلسلة تايلور و لورانت عام 1840. [3]

و سوف نتطرق الي طرق للايجاد هذه التكاملات علي وجه الخصوص مايعرف بنظرية كوشي اذا كانت الدوال التي تكون تحليلية على و داخل أي منحنى مغلق C فان $\oint_c f(z)dz = 0$.أما اذا كانت للدالة $f(z)$ نقطة شاذة معزولة عند النقطة $z = a$ و المنحنى المغلق يقع باكمله داخل دائرة مركزها هذه النقطة فاننا نستخدم صيغتا كوشي التكاملية و اضافة الي ذلك النظرية الاساسية للبواقي للايجاد قيم التكامل و المقارنة بينهم من حيث سهولة الاستخدام.

أهمية البحث:

يعتبر التكامل في نظرية المتغيرات المركبة من أهم المواضيع التي لعبت دورا كبيرا في تطور التحليل المركب و تطبيقاته, و أن مفهوم قابليته للاشتقاق بالمعنى المركب جعل من هذه التكاملات تختلف عن التكاملات في نظرية الاعداد الحقيقية, حيث ساهمت بدخول موضوعاتها في الكثير من الموضوعات التطبيقية كالفيزياء و الهندسة من خلال أعمال عدد من الرياضيين مثل كاسبير و كوشي و جرين و غيرهم .

أهداف البحث:

يهدف هذا البحث الي دراسة التكامل في نظرية المتغيرات المركبة باستخدام نظرية كوشي و صيغتا كوشي التكاملية و المقارنة مع حل التكامل باستخدام النظرية الاساسية للبواقي.

نظرية كوشي للتكامل:

مبرهنة

لتكن R منطقة بالمستوى المركب محاطة بمنحنى مغلق بسيط C و بالاتجاه الموجب و لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية في كل نقاط R بضمنها المحيط C و لتكن $f'(z)$ مستمرة في R عندئذ $\oint_c f(z)dz = 0$.[4]

البرهان

بما أن $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية فان u, v تكون متصلة و كذلك مشتقاتها الجزئية متصلة داخل المنطقة R و على حدود المنطقة المنحنى C

$$\therefore \oint_c f(z)dz = \oint_c (u + iv)(dx + idy)$$

$$=\oint_c udx-vdy+i\oint_c vdx+udy$$

و بما أن $f(z)$ دالة تحليلية و $f'(z)$ متصلة في R فان الجزئين الحقيقي u و التخيلي v هما دالتان لهما مشتقات جزئية مستمرة.و باستخدام مبرهنة جرين في الدوال الحقيقية نجد أن

$$\oint_c udx-vdy=\iint_R(-u_y-v_x)dxdy$$

$$\oint_c vdx+udy=\iint_R(u_x-v_y)dxdy$$

و باستخدام معادلتي كوشي ريمان $u_x=v_y\ ,\ u_y=-v_x$. نجد أن $\oint_c f(z)dz=0$.

ولقد استطاع العالم جورسات باعطاء برهان لهذه النظرية بدون فرض $f'(z)$ دالة مستمرة في R.

مبرهنة كوشي جورسات:

اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في كل نقاط داخل و على منحنى بسيط مغلق C فان $\oint_c f(z)dz=0$.

مثلا:

برهن أن $\oint_{|z|=1}\frac{z^2}{z-3}dz=0$

بما أن الدالة $f(z)=\frac{z^2}{z-3}$ تحليلية في كل نقاط المستوى z ماعدا النقطة z=3 و هذه النقطة لا تقع داخل الدائرة $|z|=1$ و بذلك حسب نظرية كوشي جورسات

$$\oint_{|z|=1}\frac{z^2}{z-3}dz=0\ .$$

النطاقات البسيطة و المتعددة الترابط:

يقال لنطاق D أنه بسيط الترابط اذا كان لكل منحنى مغلق بسيط داخل D لا يحتوي داخله الا نقاط من D و اذا لم يكن النطاق بسيط الترابط فانه يسمى نطاق متعدد الترابط. [5]

مثلا

برهن أن $\oint_B\frac{dz}{z^2(z^2+9)}=0$ حيث B هو الدائرة $|z|=2$ موجهه في الاتجاه الموجب بالإضافة الى الدائرة $|z|=1$ موجهه في الاتجاه السالب.

الدالة $f(z)=\frac{1}{z^2(z^2+9)}$ دالة تحليلية لجميع نقاط فيما عدا عند $z=0\ ,\ z=\pm3i$ و هذه النقط الثلاثة تقع جميعها خارج المنطقة الحلقية التي حدودها B .

نتائج صيغ تكامل كوشي:

1- نظرية موريرا(عكس نظرية كوشي):

اذا كانت $f(z)$ دالة متصلة في R منطقة بسيطة الترابط و أن $\oint_c f(z)dz=0$ على أي منحنى مغلق بسيط في R فان $f(z)$ دالة تحليلية في R . [6]

2-متباينة كوشي:

اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية داخل وعلى الدائرة C التي نصف قطرها r و مركزها عند z=0 فان

$\left|f^{(n)}(a)\right|\le\frac{M.n!}{r^n},n=0,1,2,3,...$ حيث M ثابت ما بحيث M>|f(z)| على C, أى M هي الحد الاعلى $|f(z)|$ على C . [7]

3-نظرية ليوفل:

لنفرض أن $f(z)$ دالة تحليلية, $f(z)$ محدودة أي M >|f(z)| لثابت ما M لجميع قيم Z في المستوي المركب الشامل و بالتالي يجب أن تكون $f(z)$ دالة ثابتة.

4-النظرية الاساسية في الجبر:

كل معادلة كثيرة حدود $\rho(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n=0$ ذات درجة $a_n\neq 0, n\geq 1$ لها جذر واحد على الاقل و يترتب على ذلك أن $\rho(z)=0$ لها بالضبط n من الجذور.

5-نظرية جاوس للقيمة المتوسطة:

اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية داخل و على الدائرة C التي مركزها a و نصـــف قطرها r فان $f(a)$ هي متوســـط قيم الدالة $f(z)$ على C أي $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta$.

6-نظرية أكبر مقياس:

اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على المنحني المقفل C و داخله و لا تساوي ثابتا بالتطابق, فان $|f(z)|$ تأخذ أكبر قيمة لها على C.

7-نظرية أصغر مقياس:

اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على المنحنى المقفل C و داخله, $f(z)\neq 0$ داخل C, فان $|f(z)|$ تأخذ أصغر قيمة علي C . [8]

8-نظرية المدلول:

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية على منحنى بســـيط مقفل C و داخله ما عدا القطب $z=a$ من الرتبة p داخل C و بفرض أن الدالة $f(z)$ لها صـــفر واحد $z=B$ من الرتبة n داخل C و ليس لها أصفار على C فان $\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz=n-p$. [7]

صيغتا كوشي التكاملية:

مبرهنة

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية داخل و على منحنى بسيط مغلق C و بالاتجاه الموجب و لتكن a أية نقطة داخل C عندئذ:

1-الصيغة الاولى لكوشي التكاملية تكون على الصور الاتية:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)}dz$$

2-الصيغة الثانية لكوشي التكاملية تكون على الصورة الاتية:

$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$, كذلك لكل قيم $n=1,2,3,...$ تكون المشتقة $f^{(n)}(a)$ موجودة

البرهان

1-ان الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلية داخل و على C عدا عند النقطة $z=a$ و الدائرة Γ التي معادلتها $|z-a|=\varepsilon$ حيث ε>o أي حقيقي موجب يجعل Γ تقع كليا داخل C و بالاتجاه عكس عقارب الســاعة, اذا تكون الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلية على C , Γ وفي المنطقة المحصــورة بينهما و بالتالي حسـب مبرهنة كوشـي -جورسـات ينتج $\oint_{c-\Gamma}\frac{f(z)dz}{z-a}=0$,أي أن $\oint_c\frac{f(z)dz}{z-a}=\oint_\Gamma\frac{f(z)dz}{z-a}$ و باستخدام الاحداثيات القطبية على معادلة الدائرة $\Gamma:|z-a|=\varepsilon$ أي $z-a=\varepsilon e^{i\theta};0\leq\theta\leq 2\pi$

و بالتعويض ينتج:

$$\oint_c\frac{f(z)dz}{z-a}=\oint_\Gamma\frac{f(z)dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}}$$
$$=i\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

و لما كانت $f(z)$ متصلة نأخذ النهاية عندما $\varepsilon\to 0$ ينتج

$$\oint_c\frac{f(z)dz}{z-a}=i\int_0^{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta=i\int_0^{2\pi}f(a)d\theta=if(a)\int_0^{2\pi}d\theta=if(a)2\pi$$
$$\therefore\ f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)dz}{z-a}$$

برهان (2):

لنبرهن المشتقة الاولى (عندما n=1),ليكن a+h أية نقطة قريبة جدا من a داخل C و باستعمال الصيغة التكاملية الاولى لكوشي نجد ان :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{z-(a+h)}-\frac{1}{z-a}\right\}f(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}+\frac{h}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

و لتكن Γ دائرة مركزها a و نصف قطرها عدد صغير جدا موجب ε بحيث يجعل Γ يقع كليا داخل C ثم نجعل $|h|$ صغيرة جدا بحيث

$$\frac{h}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}=\frac{h}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$ عندئذ التكامل الثاني في المقدار الاخير يصبح $0<|h|\le\varepsilon/2$

لكن $|z-a-h|\ge|z-a|-|h|>\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$

و عندما كانت $f(z)$ تحليلية داخل C فانه يمكن ايجاد عدد حقيقي موجب M بحيث $|f(z)|<M$ و كان طول محيط الدائرة Γ هو $2\pi i$ نجد أن:

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}\right|\le\frac{|h|M(2\pi\varepsilon)}{2\pi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\varepsilon^2}=\frac{2\pi M|h|}{\pi\varepsilon^2}$$

نعتبر أن $|z-a|=\varepsilon$ فاذا جعلنا ε ثابتة و $|h|\to 0$ عندئذ التكامل الاخير يقترب الى الصفر , بالتالي فان

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$$

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$$ اذا

و بنفس الطريقة عندما n=2 نعيد طريقة الاشــتقاق هذه على الدالة $f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$ وذلك بإحاطة النقطة a بدائرة Γ نصـف قطرها ε>0

ثم نأخذ نقطة قريبة من a مثل a+h بحيث $|h|<\frac{\varepsilon}{2}$ ينتج

$$\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^2}-\frac{1}{(z-a)^2}\right\}f(z)dz$$

$$=\frac{2!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^3}+\frac{h}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\{3(z-a)-2h\}f(z)dz}{(z-a)^3(z-a-h)^2}$$

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\{3(z-a)-2h\}f(z)dz}{(z-a-h)^2(z-a)^3}\right|\le\frac{|h|M(2\pi\varepsilon)}{2\pi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\varepsilon^3}=\frac{4M|h|}{\varepsilon^3}$$ لان $h\to 0$ فان التكامل الثاني يقترب من الصفر عندما

حيث M عدد حقيقي موجب و يحقق المتباينة:

$|3(z-a)-2h||f(z)|<M$,و هذا ممكن لان $f(z)$ دالة تحليلية ضمن الدائرة Γ المحددة و عندما $h\to 0$ تنتج المشتقة الثانية

$$f^{(2)}(a)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^3}=\frac{2!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a)^3}$$

و بطريقة متماثلة نستنتج الصيغة عندما n=3,4,5… و بهذا نتحصل على الصورة العامة $f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}; n=1,2,3,\ldots$

سلسلة لورانت (Laurents series)

الصــورة العامة لها تكون $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ ....(1) حيث أن , $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}}, n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ ....(2) و
منطقة تقارب هذه السلسلة هى منطقة تقارب كل من هاتين السلسلتين:

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots \quad ....(3)$$

$$\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3}+\ldots \quad ....(4)$$

و بالتالي السلسلة في المعادلة (3) هى سلسلة القوى و منطقة تقاربها هي دائرة مركزها z_0 و نصف قطرها $R_1=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$. السلسلة (4) نستبدل z بمتغير جديد w بحيث $w=(z-z_0)^{-1}$ و ان هذا التبديل يحول السلسلة (4) الى سلسلة القوى من الشكل $a_{-1}w+a_{-2}w^2+a_{-3}w^3+\ldots$ ....(5) و تكون منطقة تقاربها دائرة مركزها نقطة الاصل في المستوى w و نصف قطرها $|w|<\frac{1}{R_2}$ أى أن $\left|\frac{1}{w}\right|>R_2$, نحصل على تقارب السلسلة للمعادلة (4) بالشكل $|z-z_0|>R_2$ و بالتالي فان منطقة التقارب للمعادلة (1) تعرف بالمتباينتين:

$|z-z_0|>R_2 \quad , \quad |z-z_0|<R_1$ ....(6) ,و ان المتباينة $|z-z_0|<R_1$ تعين القسم الداخلي للدائرة التي مركزها z_0 و نصف قطرها R_1. و المتباينة $|z-z_0|>R_2$ تعين القسم الخارجي من الدائرة التي مركزها z_0 و نصف قطرها R_2. اذا كان $R_1\le R_2$ فان المتباينتين $|z-z_0|>R_2 \quad , \quad |z-z_0|<R_1$ لا تؤلف أي منطقة. أما اذا كان $R_1>R_2$ فان المتباينتين $|z-z_0|>R_2 \quad , \quad |z-z_0|<R_1$ تؤلف حلقة دائرية $R_2<|z-z_0|<R_1$.

أصفار الدوال التحليلية:

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية عند النقطة z_0 يمكن تمثيلها بمتسلسلة تايلور على داخلية دائرة ما مركزها z_0 أي أن:

..........(1 $|z-z_0|<r_0$, $f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, حيث $a_0=f(z_0), \quad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ و اذا كانت z_0 أحد أصــفار $f(z)$ فان $a_0=0$.

لتكن $f'(z_0)=f''(z_0)=f'''(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}(z_0)=0$..........(2) . بينما $f^m(z_0)\neq0$ فإنها تسـمى z_0 صـفرا من الدرجة m . و في حالة يكون $f(z)=(z-z_0)^m\sum_{n=0}^{\infty}a_{m+n}(z-z_0)^n \; , \quad (a_m\neq0,|z-z_0|<r_0)$..........(3) , و اذا كانت $g(z)$ هي مجموع المتسلسلة الواردة في (3) فان:

$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{m+n}(z-z_0)^n \; , \quad (|z-z_0|<r_0)$..........(4) وحيث أن المتسلسلة (4) تقاربية فان الدالة $g(z)$ تكون متصلة عند z_0 و بالتالي فانه لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث أن $|g(z)-a_m|<\varepsilon$ طالما $|z-z_0|<\delta$, اذا كانت $\varepsilon=\frac{|a_m|}{2}$ و كانت δ_0 هي قيمة δ المناظرة في هذه الحالة فان $|g(z)-a_m|<\frac{|a_m|}{2}$..........(5) طالما أن $|z-z_0|<\delta$ وهذا يبين أن $g(z)\neq0$ عند أي نقطة للجوار $|z-z_0|<\delta$.

نظرية:

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية عند النقطة z_0. اذا كانت z_0 أحد أصـــفار $f(z)$ فانه يوجد جوار للنقطة z_0 لا يحتوي أصـــفار اخرى للدالة $f(z)$. الا اذا كانت $f(z)$ هي الدالة الصفرية. و هذا يعني أن أصفار الدالة التحليلية تكون معزولة. [5]

تقسيم النقاط الشاذة:

تقسم النقاط الشـاذة للدالة $f(z)$ و ذلك بفحص متسـلسـلة لورانت للدالة و بفرض أن $R_2=0$ بحيث أن $f(z)$ تحليلية علي المنحنى C_1 و داخله ما عدا النقطة $z=a$ و التي هي نقطة شاذة معزولة

1-الاقطاب:

و الجزء الرئيســـي له عدد محدود من الحدود و $f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-a)^3}+\ldots$.
يعطي كالاتي:

. n يسمي قطبا من الرتبة $z=a$ فان, $a_{-n}\neq 0$ حيث $\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$

اذا كان n=1 فانه يسمي قطب بسيط. أما اذا كانت للدالة $f(z)$ قطب عند $z=a$ فان $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$.[8]

2-النقاط الشاذة القابلة للرفع:

اذا كانت $f(z)$ دالة وحيدة القيمة و غير معرفة عند $z=a$ و لكن $\lim_{z\to a} f(z)$ موجودة. فان $z=a$ تســمي نقطة شــاذة قابلة للرفع.في هذه الحالة تعرف $f(z)$ عند $z=a$ بأنها تساوي $\lim_{z\to a} f(z)$.

مثلا

اذا كانت $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, فتكون $z=a$ نقطة شاذة قابلة للرفع لان $f(0)$ غير معرفة ولكن $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$.

3-نقاط شاذة أساسية:

اذا كانت $f(z)$ وحيدة القيمة فتسمى أي نقطة شاذة و التي ليست قطب أو نقطة شاذة قابلة للرفع بنقطة شاذة أساسية اذا كانت $z=a$ نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ فان الجزء الرئيسي لمفكوك لورانت يكون له عدد لانهائي من الحدود.

4-نقاط تفرع:

تسمى نقطة ما $z=z_0$ بأنها نقطة تفرع لدالة متعددة القيم $f(z)$ اذا كانت تفرعات $f(z)$ تتبادل عندما تتحرك z على مسار مقفل حول z_0.

النقاط الشاذة عند اللانهاية:

بوضــع $z=\frac{1}{w}$ في $f(z)$ فنحصــل على الدالة $f(\frac{1}{w})=F(w)$, فان تفرع النقطة الشــاذة عند $z=\infty$ يعرف بأنها نفس نوع النقطة الشــاذة للدالة $F(w)$ عند $w=0$.

البواقي:

اذا كانت للدالة $f(z)$ عدد محدود فقط من النقط الشاذة التي تنتمي الى داخلية كفاف مغلق بسيط C فان هذه النقط الشاذة لابد و أن تكون معزولة. [7]

مبرهنة البواقي:

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية داخل و على منحنى مغلق بســيط C بالاتجاه الموجب عدا عند النقاط $z_1,z_2,z_3,\ldots,z_n$ التي تؤلف عددا منتهيا من نقاط شــاذة معزولة بالنسبة للدالة $f(z)$. عندئذ $\oint_c f(z)dz=2\pi i[\operatorname{Res}(f,z_1)+\operatorname{Res}(f,z_2)+\ldots+\operatorname{Res}(f,z_n)]$.[4]

نتيجة:

اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على و داخل منحنى مغلق يسير C باستثناء قطب من الرتبة m عند $z=a$ داخل C فان $\oint_c f(z)dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,a)$

حيث $\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}(z-a)^m f(z)}{dz^{m-1}}$.[4]

و تسمي هذه النظرية تمهيدا لنظرية البواقي لان النقاط الشاذة الوحيدة المسموح لها للدالة هو الاقطاب .لان التكامل للدالة $f(z)$ على المسار المغلق البسيط C الذي يحتوي أقطاب الدالة $f(z)$ هو $2\pi i$ مضروبا في مجموع البواقي لكل الاقطاب.

و سوف نقوم بعرض بعض الامثلة و حلها باستخدام صيغتا كوشي التكاملية و باستخدام مبرهنة البواقي .

مثال1

أوجد قيمة $\oint_c \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz$ حيث C يحتوي النقطة $z=-i$ و لا يحتوي النقطة $z=2$.

الحل:

i- باسـتخدام صـيغتا تكامل كوشـي, و باسـتخدام الكسـور الجزئية نجد أن $\oint_c \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz=\frac{-1}{2+i}\oint_c \frac{z-1}{z+i}dz$, و بما أن C يحتوي النقطة $z=-i$,و استخدام الصيغة التكاملية الاولي لكوشي $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)}dz$ نجد أن:

$$\oint_c \frac{z-1}{z+i}dz = 2\pi i[-i-1]$$

$$\therefore \oint_c \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz = \frac{-1}{2+i}[2\pi i(-i-1)] = \frac{i+1}{i+2}(2\pi i) = \frac{2}{5}\pi[3i-1]$$

ii- باستخدام نظرية البواقي Res(f,-i) لقطب يسير (m=0) و بالتالي

$$\text{Re}\,s(f,-i) = \frac{1}{0!}\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{(z-1)}{(z-2)(z+i)} = \frac{3+i}{5}$$

$$\therefore \oint_c \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz = 2\pi i(\frac{3+i}{5}) = \frac{2}{5}\pi(3i-1)$$

مثال2

أحسب قيمة التكامل $\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z^3-z}dz$.

الحل

i- باستخدام صيغتا كوشي التكاملية

باستخدام الكسور الجزئية نجد أن:

$$\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z^3-z}dz = -\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z}dz + \frac{1}{2}\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z-1}dz$$

ومن الصيغة التكاملية الاولى لكوشي $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)}dz$

نجد أن $\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i$ و كذلك $\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z-1}dz = 2\pi i e$

$$\therefore \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z^3-z}dz = -\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z}dz + \frac{1}{2}\oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z-1}dz = -2\pi i + \frac{1}{2}(2\pi i e) = \pi i[-2+e]$$

ii-باستخدام نظرية البواقي

نلاحظ أن النقاط الشاذة لدالة التكامل عند $z = 0, \pm 1$. و حينئذ نحتاج فقط لحساب الباقي عند القطبين البسيطين عند كل من $z = 0, 1$

$$\text{Re}\,s(f,0) = \frac{1}{0!}\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{z^2-1} = -1$$

$$\text{Re}\,s(f,1) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{e^z}{z(z+1)} = \frac{e}{-2}$$

$$\therefore \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z^3-z}dz = 2\pi i[\text{Re}\,s(f,0) + \text{Re}\,s(f,1)] = 2\pi i[-2+e]$$

مثال3

احسب قيمة $\oint_{|z|=1} \frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{z^2-2iz}dz$

الحل

النقاط الشـاذة للدالة المكاملة هي $z = 0, 2i$,حيث النقطة $z = 0$ تقع داخل دائرة الوحدة و هي قطب بسيط .أما النقطة $z = 2i$ تقع خارج دائرة الوحدة و بالتالي التكامل عندها تساوي صفر و بالتالي نحسب فقط التكامل حول دائرة الوحدة, و النقطة الداخلية الوحيدة هنا هي $z = 0$

i –باستخدام صيغتا كوشي التكاملية

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{z^2-2iz}dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{(z-2i)}}{z}dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}dz \quad , f(z) = \frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{z-2i}$$

و باستخدام الصيغة التكاملية الاولى لكوشي نجد أن:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{z^2-2iz}dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{(z-2i)}}{z}dz = -\pi$$

ii-باستخدام النظرية الاساسية للبواقي

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{z^2-2iz}dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{(z-2i)}}{z}dz = 2\pi i \operatorname{Re}s(f,0)$$

$$\operatorname{Re}s(f,0) = \frac{1}{0!}\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{z^2-2iz} = \frac{-1}{2i}$$

$$\therefore \oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{\frac{i\pi z}{2}}}{z^2-2iz}dz = 2\pi i \operatorname{Re}s(f,0) = 2\pi i(\frac{-1}{2i}) = -\pi$$

النتائج:

1- اذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على المنحنى المغلق C و داخله فان التكامل يساوي صفربغض النظر عما يحدث للدالة من نقاط شاذة تسبب عدم التحليلية لها خارج هذا النطاق

مثلا

$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{dz}{z} = 0$, لان الدائرة $|z-2|=1$ لا تحتوي على النقطة الشاذة $z=0$.

2-يمكن تطبيق نظرية كوشي على المناطق المتعددة الاتصال وذلك بعمل قطع(أو عدة قطوع)بين الفجوات التي تحتويها هذه المنطقة.

3-اذا كانت C منحنى بسيط مغلق فان $\oint\limits_c z^2dz = 0$, $\oint\limits_c zdz = 0$, $\oint\limits_c dz = 0$ و ذلك لان الدوال $1, z, z^2$ دوال تحليلية و مشتقاتها متصلة لجميع النقاط.

4-التعبير عن الدالة المركبة في صورة متسلسة القوى(متسلسلة لورانت) متقاربة تلعب دورا بارزا في تطور نظرية كوشي للتكاملات المحددة.

5-النظرية الاساسية للبواقي تمثل صورة عامة لنظرية كوشي حيث أنها تشمل جميع الحالات:

أ-نظرية كوشي و كوشي جورسات, أي الحالة التي تكون فيها الدالة المكاملة تحليلية و بالتالي $\operatorname{Re}s(f) = 0$.

ب-صيغة تكامل كوشي و تعميمها, أو النظرية الاساسية للبواقي أي الحالة التي يكون فيها الدالة المكاملة عدد منتهي من النقاط الشاذة المعزولة.

6- اذا تعددت الاقطاب في هذه الحالة لايمكن تطبيق تكامل كوشي مباشرة و أحيانا لا نستطيع تطبيقها , بينما يمكن تطبيق نظرية البواقي.

التوصيات

دراسة موضوع نظرية البواقي للنقاط الشاذة من نقاط تفرع و أساسية لتساهم في ايجاد قيم التكاملات المعتلة و تطبيقاتها.

المصادر

1. Dettman W. Applied complex variables. Dover publications Inc, New York, 1984.
2. Marsden J, Hoffman M. Basic complex Analysis, W.H. Freeman, 3rd Edition, USA, 1999.
3. Conway J. Functions of one complex variable, 2nd Edition, Springer, Swit 2er Land, 1978.
4. Complex functions, Samir Al-Basheer Hadid-Yahya Saeed, University of Mosul, 1980.
5. Complex variables and its application, William R. Drake, King Saud University, Scientific Publishing and Printing, translated by Dr. Saadoun Ibrahim, Dr. Abu Bakr Al-Siddiq Bayoum.i.
6. Introduction to Complex Analysis, Dr. Magdy Al-Tawil, University Publishing House, Egypt, 2005.
7. Complex functions, Schaum series, Murray R. Spiegel, International House for Cultural Investments, Egypt, 2000..
8. General formula of Cauchy's theorem, Dr. Al-Munji Bilal, July 18, 2017.