AlQalam
Alq J Med App Sci
https://journal.utripoli.edu.ly/index.php/Alqalam/index eISSN 2707-7179

Original article

Solving Partial Differential Equations Using Fourier Series

Munira Hadya, Sana Maetouq*, Mouna Salamah

Department of Mathematics, Faculty Education, University Zawia, Zawia, Libya,

ARTICLE INFO

Corresponding Email. s.maetoug@zu.edu.ly

Received: *01-08-2024*
Accepted: *22-10-2024*
Published: *09-11-2024*

Keywords. *Fourier Series, Functions, Exponential Transform, Applications, Analysis.*

ABSTRACT

This research paper aims to study the methods of solving partial differential equations using Fourier series. Partial differential equations are a powerful and practical tool in mathematics and physics to describe many phenomena and processes that involve continuous change at the level of equations and functions. The basic concepts related to the Fourier series and how to represent functions using it in the field of mathematics will be reviewed. Application examples of partial differential equations, such as waves, heat and diffusion, and how to use the Fourier series to solve them will also be presented. The steps of solving the partial differential equation using the Fourier series will be explained. The importance of Fourier series in the theory of partial differential equations is that periodic functions f(x) defined on (-∞,∞) or functions defined on a finite interval can be represented by an infinite interval of sines and cosines. In this research, the solution of the partial differential equation using the Fourier series was studied with the solution of an example.

Cite this article. *Hadya M, Maetouq S, Salamah M. Solving Partial Differential Equations Using Fourier Series. Alq J Med App Sci. 2024;7(4):1180-1186.* https://doi.org/10.54361/ajmas.247439

بحث اصلي

حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام متسلسلة فورييه

منيرة هدية، سناء معتوق، منى السنوسي

قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة الزاوية، الزاوية، ليبيا

المستخلص

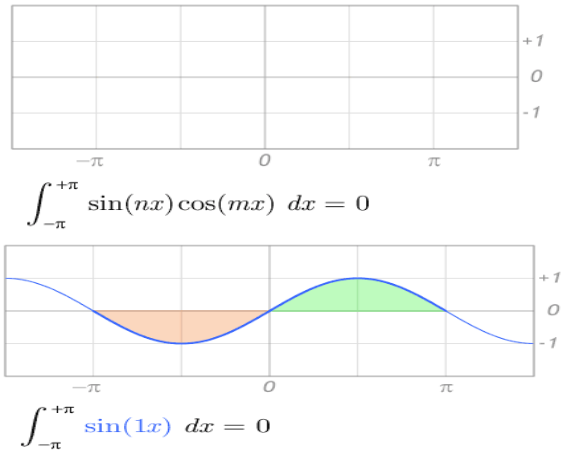
تستهدف هذه الورقة البحثية دراسة طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام متسلسلة فورييه. تعد المعادلات التفاضلية الجزئية أداة قوية وعملية في علم الرياضيات والفيزياء لوصف العديد من الظواهر والعمليات التي تتضمن تغيرًا مستمرًا على مستوى المعادلات والدوال.ستتم مراجعة المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمتسلسلة الفورييه وكيفية تمثيل الدوال باستخدامها في مجال الرياضيات. سيتم أيضًا تقديم أمثلة تطبيقية للمعادلات التفاضلية الجزئية، مثل الموجة والحرارة والانتشار، وكيفية استخدام متسلسلة فورييه لحلها.سيتم توضيح خطوات حل المعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام متسلسلة فورييه. أن أهمية سلاسل فورية في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية هي إنالدوال الدورية f(x)المعرفة علي(-∞,∞)) أو الدوال المعرفة علي فترة منتهيةيمكن تمثيلها فترة لانهائية من الجيوب وجيوب التمام و في هذا البحث تمت دراسة حل المعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام متسلسلة فورييه مع حل مثال.

الكلمات المفتاحية: متسلسلة فورييه، الدوال، التحويل الأسي، التطبيقات، التحليل.

المقدمة

متسلسلة فورييه (Fourier series) **:[1]**

هي طريقة تتيح كتابة أي دالة رياضية دورية فيشكل متسلسلة أو مجموع من دوال الجيب وجيب التمام مضروب بمعامل معين كما موضح بالشكل (1) .يعزى اسمها إلى العالم الفرنسي جوزيف فورييه تقديرا لأعماله في المتسلسلات المثلثية.



شكل 1. متسلسلة فورييه

سميت هذه المتسلسلات نسبة إلى العالم الفرنسي جوزيف فورييه، الذي حقق تطورات مهمة في دراسة المتسلسلات المثلثية.أبدع فورييه في حل هذه المعادلات من أجل حلحلة معادلة الحرارة في صفيحة معدنية، ناشرا نتائجه الأولى في عام 1807.رغم أن الهدف الأساسي الذي حفّز تطوير متسلسلات فورييه هو حلحلة معادلة الحرارة، تبين واضحا أن نفس التقنية قد تستعمل في مجالات أخرى واسعة في الرياضيات والفيزياء، بالتحديد، المجالات اللائي يتعلقن بمعادلات تفاضلية خطية بمعاملات ثابتة .

بعد التحقيقات الأولية التي قام بها ليونارد أويلر وجان لرون دالمبير ودانيال برنوليقدم فورييه المتسلسلة ونشر نتائجه الأولية في كتابه (مقالة في انتشار الحرارة في الأجسام الصلبة). من خلال أبحاث فورييه ثبت أن الدالة الاختيارية المستمرةيمكن تمثيلها بمتسلسلة مثلثية.

قبل تجارب فورييه، لم يكن هناك حل لمعادلة الحرارة معروفًا في الحالة العامة، على الرغم من أن حلولًا معينة كانت معروفة إذا تصرف مصدر الحرارة بطريقة بسيطة، وخصوصاً، إذا كان مصدر الحرارة عبارة عن موجة جيبية أو جيب التمام .تسمى هذه الحلول البسيطة في بعض الأحيان باسم الحلول الذاتية .

كانت فكرة فورييه هي نمذجة مصدر حراري معقد على أنه تراكب أو تركيبة خطية من موجات الجيب وجيب التمام البسيطة، وكتابة الحل كتراكب لحالات الحلول الذاتية المقابلة فكرة فورييه كانت نمذجة مصدر حراري معقد كتراكب أو تجميع خطي لموجات جيبية وتمام جيبية بسيطة، وكتابة حل كتراكب للحلول الذاتية المناظرة. هذا التراكب أو التجميع الخطي يسمى متسلسلة فورييه.

متسلسلة فورييه Fourier Series والدوال الدورية Periodic Functions :[5]

الدالة f(x) يقال أن لها دورة T اذا كانت $f(x+T_n) = f(x)$ حيث T مقدار ثابت موجب (T> 0) .

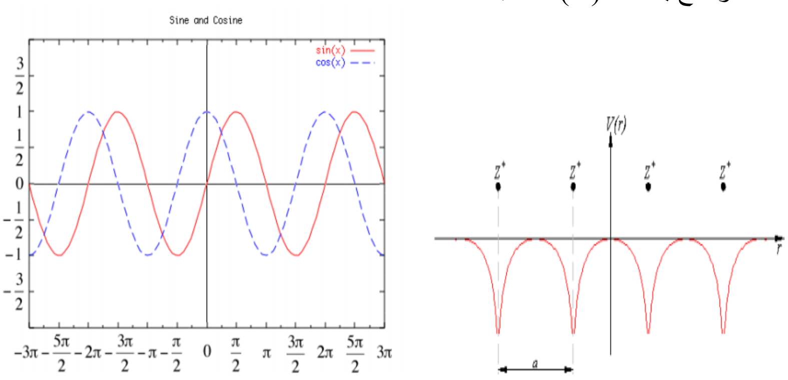
مثلاً :- جميع الدوال المثلثية لها دورة $T = 2\pi$ لذلك فإن

$$\sin(x+2n\pi)=\sin x$$

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x\ ,\ n = 0,1,2,3,\ldots$$

و الدورة للدالة $\tan x$ هي π.

والثابت له أي عدد موجب كدورة , كما موضح بالشكل (2) أدناه .



شكل 2. يوضح الدالة الدورية

لتكن الدالة$f(x)$معرفة على الفترة $(-L , L)$ وخارج هذه الفترة بالعلاقة$f(x+2L) = f(x)$ أي إن الدالة$f(x)$لها دورة $T=2L$.فأن متسلسلة فورير المناظرة للدالة $f(x)$ تعطي بالعلاقة:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$$

حيث ان a_n وb_nتعرف بمعاملات فورييرFourier Coefficients وتعطى بالعلاقة:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\frac{n\pi x}{L}dx$$

إذا كانت$f(x)$لها دورة 2L فإن المعاملات b_n a_n , يمكن تحديدها بتكافؤ من العلاقتين:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}\right\} n = 1,2,3,..$$

استخدم عالم الرياضيات الفرنسي جان باتيست فورييه Fourier في تحليله للانتقال الحراري في الأجسام الصلبة والذي كان قد استخدمها قبل العالم الرياضي السويسري دانيال بيرنوللي D.Bernonly والمتعلقة بتمثيل الدالة بمتسلسلة لانهائية علي الصورة:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin nx$$

بمعني أخر لقد اخذ في الاعتبار إمكانية تحقيق الشرط الحدي $f(x) = u(x, 0)$

باختيار مناسب للمعاملات D_n ومن ثم الحصول علي حل معطي بمتسلسلة لا نهائية علي الصوره:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-n^2 t}\sin nt$$

الشكل الأسي لمتسلسلة فورييه: **[3]**

معاملات فورييه الأسية : لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و $n\in \mathbb{Z}$. العدد المركب التالي:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

يسمى معامل فورييه الأسي رقم n للدالة f , ونرمز له بالرمز $f^\wedge$ (n) أو $C_n(f)$.

بعض الخصائص العامة لمعاملات فورييه الأسية: **[1]**

لتكن$f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

1- لكل عدد حقيقي $a\in R$ لدينا

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

لان الدالة $f(x) \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ عليه فإن

$$.C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

2- ليكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $g \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ و$\lambda \in \mathbb{C}$ لدينا

$$C_n(\lambda f + g) = \lambda C_n(f) + C_n(g), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

تقارب متسلسلة فورييه: [1]

نظرية**:** لتكن $C_0 + \sum_{n\geq 1}(C_n e^{inx} + C_{-n}e^{-inx})$ سلسلة مثلثية .

إذا كانت هذه السلسلة تتقارب تقاربا منتظما إلى الدالةf , فإن

1- $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2- لدينا.$\hat{f}(n) = C_n, \hat{f}(-n) = C_{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$

Proof

1- لكل $n \in \mathbb{N}$ كثيرة الحدود المثلثية تكون

$$P_N(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{n=N}(C_n e^{inx} + C_{-n}e^{-inx})$$

مستمرة ودورية والعدد 2π يمثل دورة لها , وتتقارب تقاربا منتظما إلى الدالة f فإن الدالة fستكون بدورها مستمرة و دورية والعدد 2π يمثل دورة لها وهذا يعني. $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2- لكل عدد صحيح n لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \left|P_N(x)e^{inx} - f(x)e^{-inx}\right| = \left|P_N(x) - f(x)\right| \quad .$$

وبالتالي متتالية الدوال $\left(P_N(x)e^{-inx}\right)_N$ تتقارب تقاربا منتظما للدالة $\left(f(x)e^{-inx}\right)$. ومن تم لدينا

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \int_0^{2\pi} P_N e^{-inx}\,dx$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \hat{f}(n) \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_N(x)e^{-inx}\,dx$$

لكل عدد طبيعي N يحقق الشرط $|n| \le N$ لدينا

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_N(x)e^{-inx}\,dx = C_n \quad .$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,,\hat{f}(n) = C_n$$

الدالة الزوجية والدالة الفردية: [5]

تعريف:

الدالة f زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$

الدالة f فردية إذا كانت $f(-x) = -f(x)$

خواص الدوال الزوجية والفردية:

1) حاصل ضرب دالتين زوجيتين يكونزوجي.

2) حاصل ضرب دالتين فرديتين يكون زوجي.

3) حاصل ضرب دالة زوجية في دالة فردية يكون فردي.

4) إذا كانت الدالة زوجية فإن $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_0^L f(x)dx$

5) إذا كانت الدالة فردية فإن $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$.

مثال 1:[4] بفرض إن $f(x)$ دالة خلال 2π بحيث أن

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} x & , \ x \in (0,\pi) \\ \pi & , x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

احسب متسلسلة فورييه في الفترة $0 \le x \le 2\pi$.

solution

متسلسلة فورييه هي : $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$

في هذا المثال معاملات فورييه هي:

$$a_0 = +\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi dx \;=\; \frac{3\pi}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

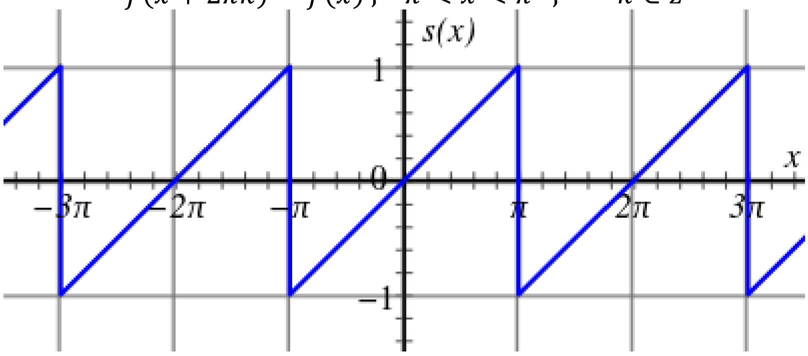
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{-1}{n}$$

$$(\mathrm{x}) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos(nx) - \frac{1}{n}\sin(nx)\right]f$$

مثال2 : موجة سن المنشار [3]

$$f(x) = \frac{x}{\pi}\ ,\quad -\pi < x < \pi$$

$$f(x + 2\pi k) = f(x)\,, -\pi < x < \pi \quad , \qquad k \in z$$



شكل 3. يوضح رسم لموجة سن المنشار

استمرار دوري للدالة الخطية $f(x) = {}^{x}/_{\pi}\ \ , x \in [-\pi\,, \pi]$

في حالة مثال موجة سن المنشار، معاملات فورييه هي:

$a_n = 0,\ a_0 = 0$ لان الدالة فردية

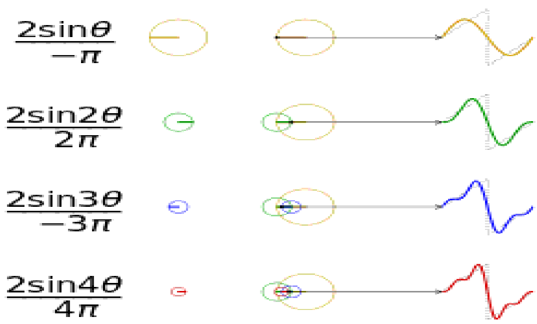
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \quad , \qquad n \geq 1\ .$$

يمكن إثبات أن متسلسلة فورييه تتقارب إلى $f(x)$ في كل نقطة x حيث تكون f قابلة للاشتقاق وبالتالي:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx),$$

نلاحظ أربع مجاميع جزئية (سلسلة فورييه) بأطوال 1 و 2 و 3 و 4 حدود. يوضح كيف أن التقريب لموجة سن المنشار يتحسن مع زيادة عدد الحدود.



شكل 4.

حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام متسلسلات فورييه:

نظرية:ديريكله (Dirichlet) **[4]**

لتكن $f \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ليكن $l_0 = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ إذا كانت النهاية التالية

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+x)+\ f(x_0-x)-2\,l_0}{x}$$

موجودة وتكون عدداً مركباً فإن $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = l_0$

الان نطبق متسلسلة فورييه على المعادلات التفاضليةالجزئية ,

حل معادلة الحرارة **:**[2] وهى معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية وتكتب على الصورة التالية

- $$(E) = \begin{cases} u_t = u_{xx} \ , & t \geq 0\,, x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = 0 & ,\ \forall t \geq 0 \\ u(\pi,t) & ,\ \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & ,x \in [0,\pi] \end{cases}$$

حيث إن الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين و $\acute{f}$ مستمرة على المجال $[0,\ \pi]$.

Solution

f (0) = u (0,0) = 0 , u ($\boldsymbol{\pi}$,0) = f($\boldsymbol{\pi}$) = 0

$$\Rightarrow f(0) = f(\pi) = 0$$

لتكن الدالة الفردية $\tilde{f} \in PC_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ بحيث $\tilde{f}\ /\ [0,\pi] = f$ حسب نظرية ديريكله لدينا

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\ ,\ \forall x \in [0,\pi]$$

الان نقسم المعادلة (E)إلى المعادلات التفاضلية الجزئية الأتية

$$\forall n \in N \quad , E_n = \begin{cases} u_t = u_{xx} & ,\ t \geq 0\,,\ x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = 0 & ,\forall t \geq 0 \\ u(\pi,t) = 0 & ,\forall t \geq 0 \\ u(x,0) = b_n\sin(nx) & ,x \in [0,\pi] \end{cases}$$

إذا كانت الدالة u_n حلا للمعادلة (E_n) فإن الدالة $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ستكون حلا للمعادلة الأصلية (E).

الأن نوجد حل للمعادلة (E_n) , وليكن u(x , t) الذي يكتب بالصورة الأتية:

u(x , t) = h (x) g(t)

من الشرط الابتدائي $u(x,0) = b_n \sin(nx)$
ومن جهة أخرى لدينا $u(x,0) = h(x)\,g(0)$ وعليه فإن

$$u(x,0) = h(x)\,g(0) = b_n \sin(nx)$$
$$\Longrightarrow \quad h(x) = \frac{1}{g(0)} b_n \sin(nx)$$

والمعادلة $u_t = u_{xx}$ تصبح $g(x) = \frac{h''(x)}{h(x)} \acute{g}(t)$
نقسم الطرفين على $h(x)\,g(t)$ ينتج النسبة الأتية
$\frac{h''(x)}{h(x)} = \frac{\acute{g}(t)}{g(t)}$ ولكن $\frac{h''(x)}{h(x)} = -n^2$ و
$\Longleftarrow \frac{\acute{g}(t)}{g(t)} = -n^2$ $g(t) = -n^2 \acute{g}$ وهى معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى ومعاملاتها ثابتة حلها هو $g(t) = g(0)\, e^{-n^2 t}$

$$\Longrightarrow u(x,t) = h(x)g(t) = b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

وبالتالي الدالة $u_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$
تكون حل للمعادلة (E_n) وبالتالي حل المعادلة الأصلية (E) يكون بالصورة :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

لها معنى رياضي دقيق لأن السلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ تقاربية, بحكم أن الدالة $\tilde{f}$ من الصنف C^1 قطعياً وبالتالي السلسلة :
$\forall t \geq 0 \forall n \in N, \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n n^k e^{-n^2 t}|$,
تقاربية ، ومن تم ، الدالة $u(x,t)$ من الصنف C^∞ بالنسبة للمتغير x، وكذلك من الصنف C^∞ بالنسبة للمتغير t تمثل حلا للمعادلة الأصلية (E) .
لأن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ تقاربية لأن الدالة $\tilde{f}$ من الصنف C^1 قطعياً وبالتالي السلسلة
وأخيراً نثبت ان الحل $u(x,t)$ حل وحيد للمعادلة الأصلية ، من الصنف C^2 بالنسبة للمتغير x ، ومن الصنف C^1 بالنسبة للمتغير t .
لنفرض العكس ، وجود حلين مختلفين $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ للمعادلة الأصلية (E) .
ليكن لدينا $w = u_1 - u_2$

وعليه لدينا
$$\begin{cases} w_t = w_{xx} \quad , \ \forall x \in [0,\pi] \ , \forall t \geq 0 \\ w(0,t) = 0 \quad , \forall t \geq 0 \\ w(\pi,t) = 0 \quad , \forall t \geq 0 \\ w(x,0) = 0 \quad , \forall x \in [0,\pi] \end{cases}$$

لتكن الدالة : $e(t) = \int_0^\pi w^2(x,t)dx \quad \forall t \geq 0$
ولدينا $e(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0,$

$$e(0) = \int_0^\pi w^2(x,0)dx = 0$$

$$\forall t \geq 0 \ , \ e'(t) = \int_0^\pi 2w(x,t)w_t(x,t)dt = \int_0^\pi 2w(x,t)\,w_{xx}(x,t)\,dx$$

$$= [2w(x,t)w_x(x,t)]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi 2w_x(x,t)w_x(x,t)dx$$

$$= 0 - 2\int_0^\pi [w_x(x,t)]^2\,dx = -2\int_0^\pi [w_x(x,t)]^2\,dx$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0 \ , \ e'(t) \leq 0$$
$$\Rightarrow \forall t \geq 0 \ , \ e(t) \leq e(0) = 0$$
$$\Rightarrow \forall t \geq 0 \ , \ e(t) \leq 0$$

$$\forall t \geq 0 \ , \quad e(t) = \int_0^\pi w^2(x,t)dx$$

بحكم أنة لكل $t \geq 0$ ، الدالة $x \to w^2(x,t)$ مستمرة وموجبة ، فإن :

$$\forall x \in [0,\pi], \quad w^2(x,t) = 0$$

$\Longrightarrow w = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ وهذا تناقض فعليه الحل يكون وحيد .

المراجع

1. Lanczos C. Discourse on Fourier Series. the Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 2016.
2. Gerald B. Folland, Fourier analysis and its application, Wadsworth, Inc, Belmont, California, 1992.
3. de Reyna J. Pointwise Convergence of Fourier Series, Springer – Verlag, Berlim, 2002.
4. Edwards R, Fourier Series: A Modern Introduction, Springer – Verlag, New York, 1979.
5. المعادلات التفاضلية الجزئية -آس فارلو- ترجمة د. مها الكبيسي منشورات جامعة عمر المختار البيضاء2005.