https://journal.utripoli.edu.ly/index.php/Alqalam/index eISSN 2707-7179

Original article

Comparison of Methods of Solving Improper Integrals Using Methods of Integration and the Gamma and Beta Functions

Aml Ali, Suad Alkhammas*

Department of Mathematics, Faculty of Education, University of Zawia, Zawia, Libya

ARTICLE INFO

Corresponding Email. *s.alkhammas@zu.edu.ly*

Received: *29-06-2024*
Accepted: *22-08-2024*
Published:*05-09-2024*

Keywords. *Improper Integrals, Gamma Function, Beta Function, Difficult Calculations, Comparison.*

ABSTRACT

In this paper, we study Improper Integrations and methods of solving them using the usual integration methods and comparing their solution using Gamma and Beta Functions, where we touched on the study of the types and properties of Improper Integrations and the study of convergence tests for them. Our study focused on the importance of Gamma and Beta special functions in terms of making Improper Integrations with the comparison of solutions using accepted integration methods. The study relied on collecting data from international books, references and journals, which led us to results that confirm that Gamma and Beta contribute in a very wonderful way in facilitating many difficult practical calculations related to subject of the study. It also provides a successful way to save time and effort to solve problems of Improper Integrations. Some of these integrations can only be solved using the Gamma and Beta functions.

Cite this article. *Ali A, Alkhammas S. Comparison of Methods of Solving Improper Integrals Using Methods of Integration and the Gamma and Beta Functions. Alq J Med App Sci. 2024;7(3):855-864.* https://doi.org/10.54361/ajmas.247357

بحث اصلي

المقارنة بين طرق الحل للتكاملات المعتلة باستخدام طرق التكامل ودالتي جاما وبيتا

أمل علي، سعاد الخماس*

كلية التربية أبو عيسى، جامعة الزاوية، ليبيا

المستخلص

في هذا البحث ندرس التكاملات المعتلة وطرق حلها باستخدام طرق التكامل المعتادة ومقارنة حلها باستخدام دالتي جاما وبيتا، حيث تطرقنا إلى دراسة أنواع التكاملات المعتلة وخواصها ودراسة اختبارات التقارب لها. وركزت دراستنا على أهمية الدوال الخاصة جاما وبيتا من حيث اجراء التكاملات المعتلة مع مقارنة الحلول باستخدام طرق التكامل المتعارف عليها، واعتمدت الدراسة على جمع البيانات من الكتب والمراجع الدولية والمجلات البحثية والتي أوصلتنا إلى نتائج تؤكد أن دالتي جاما وبيتا تسهم بطريقة رائعة جدا في تسهيل كثير من الحسابات العملية الصعبة المتعلقة بموضوع الدراسة. كما تقدم طريقة ناجحة لتوفير الوقت والجهد لحل المسائل الخاصة بالتكاملات المعتلة بل أن بعض هذه التكاملات لا يمكن حلها إلا باستخدام دالتي جاما وبيتا.

المقدمة

يعتبر علم الحسبان من العلوم القديمة قدم التاريخ، وبالرغم من أنه تبلور في القرن السابع عشر الميلادي الا أنه كان من أكثر العلوم استخداما في مجال الحياة التطبيقية. تحدث هذا البحث عن التكاملات المعتلة وأنواعها وخواصـــها والاختبارات التي يمكن اجرائها لمعرفة هل التكامل متقارب أم متباعد. ودراسة بعض الدوال الخاصة منها دالة جاما ودالة بيتا والمقارنة بين طرق الحل باستخدام طرق التكامل ودالتي جاما وبيتا.
و قد اهتمت العديد من الدراسات بمواضيع مشابهة لموضوع البحث و أشهرها دراسة بعنوان (التكاملات الشاذة و دوال بيتا و جاما) للأستاذ الدكتور صبحي شكر الله [1]. و دراسة أخري بعنوان (دراسة بعض تطبيقات جاما) [2]. وقام مجموعة من الباحثون السوريون بإجراء بحث بعنوان (دالة خاصة جدا للحديث عن دالة جاما) [3]. وكل هذه الدراسات أثنت على أن الدوال الخاصة دوال سريعة الحضور في جل الكثير من المسائل الرياضية والهندسية فضلا عن كونها تؤدي دورا مهما في نظرية تقريب الدوال، اضافة الي أن الدوال الخاصة تمتلك من المهارات والاليات الرياضية الفائقة القدرة على التبسيط والاختصار فهي تسهم بطريقة رائعة في تسهيل كثير من الحسابات العلمية الصعبة والمعقدة وتقديم طريقة ناجحة جدا لتوفير الوقت والجهد.
أهمية التكاملات المعتلة في العديد من المجالات التطبيقية لدراســة مســاحة الاشــكال الغير منتظمة فإنها تســتدعى اســتخدام التكاملات وكافة التطبيقات الفيزيائية للرياضيات وميكانيكا الموائع تتطلب الايفاء بأنواع التكاملات المعتلة نظرا لأهميتها من النواحي التطبيقية والنظرية. يهدف هذا البحث الي دراسة التكاملات المعتلة باستخدام طرق التكامل والمقارنة مع حل التكاملات المعتلة باستخدام دالتي جاما وبيتا.

التكاملات المعتلة

تعريف:

التكامل $\int_a^b f(x)dx$ يكون تكاملا معتلا اذا كان:-

1- $a=-\infty$ أو $b=\infty$ أو كليهما, أي أن نهاية التكامل لمقدار واحد (a أو b) أو كلاهما هي ما لانهاية.

2- $f(x)$ دالة غير محدودة عند نقطة أو أكثر في الفترة $a\le x\le b$ مثل هذه النقط تســـمي الفردية للدالة $f(x)$ و بذلك فان التكاملات المناظرة (1) , (2) تسمي بالتكاملات المعتلة من النوع الاول و الثاني علي الترتيب.

التكاملات $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ و كذلك $f(x)$ غير محدودة عند نقطة أو أكثر عند الفترة $a\le x\le b$ تسمي تكاملات معتلة من النوع الثالث.

و نعرف التكاملات المعتلة من النوع الاول:-

لنفرض أن $f(x)$ محدودة و قابلة للتكامل في الفترة $a\le x\le b$ نعرف $\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ فاذا كانت النهاية موجودة فان التكامل يكون متقارب, أما اذا كانت النهاية غير موجودة فانه يكون متباعد.

و بالمثل نعرف $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ فيكون متقارب اذا كانت النهاية موجودة , و يتباعد اذا كانت النهاية غير موجودة.[4]

التكاملات المعتلة الخاصة من النوع الاول:

1- التكامل الهندسي أو التكامل الاسي:

و يكون علي الصورة $\int_a^{\infty} e^{-tx}dx$ حيث t مقدار ثابت, و يكون متقارب اذا كانت $t>0$, و يكون متباعد اذا كانت $t\le 0$.

2- $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ حيث p مقدار ثابت, $a>0$ يكون متقارب اذا كانت $p>1$, و يكون متباعد اذا كان $p\le 1$ (قارن بمتسلسلة p).

اختبارات التقارب للتكاملات المعتلة من النوع الاول:

1-اختبار المقارنة(التكاملات ذات الحدود الموجبة):

أ-لنفرض أنه $g(x)\ge 0$ لجميع قيم $x\ge a$ و لنفرض أن $\int_a^{\infty} g(x)dx$ تتقارب حينئذ اذا كان $0\le f(x)\le g(x)$ لكل $x\ge a$, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ أيضا تتقارب.[4]

Ex1

بين أن $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$ يتقارب.

من اختبار المقارنة نجد أن $\frac{1}{e^x+1} \le \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, اذا $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = 0$

اذا $\int_0^\infty e^{-x}dx$ يتقارب , و بالتالي فان $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$ يكون متقارب ايضا.

ب-لنفرض أن $g(x) \ge 0$ لجميع $x \ge a$ و لنفرض $\int_a^\infty g(x)dx$ تتباعد , اذن اذا كانت $f(x) \ge g(x)$ لجميع $x \ge a$ فيكون $\int_a^\infty f(x)dx$ أيضا تتباعد.

Ex2

بين أن $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$ متباعد.

من اختبار المقارنة نجد أن $\int_2^\infty \frac{dx}{x}, x \ge 2$ تتباعد حيث P=1 و بالتالي فان $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$ يكون متباعد.

2-اختبار خارج القسمة :(التكاملات ذات الحدود الموجبة)

أ-اذا كانت $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A \ne 0$ فان $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_a^\infty g(x)dx$ يتقاربان.

أما اذا كانت $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ فان $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_a^\infty g(x)dx$ يتباعدان.

ب-اذا كانت $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ و كان $\int_a^\infty g(x)dx$ يتقارب فان $\int_a^\infty f(x)dx$ يتقارب.

ج-اذا كانت $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ و كان $\int_a^\infty g(x)dx$ تتباعد فان $\int_a^\infty f(x)dx$ تتباعد.[4]

3-اختبار المتسلسلة :(للتكاملات ذات الحدود الموجبة):-

$\int_a^\infty f(x)dx$ يتقارب أو يتباعد تبعا للمقدار $\sum u_n$ حيث $u_n = f(n)$ يتقارب أو يتباعد.[6]

4-التقارب المطلق و التقارب الشرطي:

$\int_a^\infty f(x)dx$ تسـمي تقاربية مطلقة اذا كانت $\int_a^\infty |f(x)|dx$ تتقارب ,و اذا كانت $\int_a^\infty f(x)dx$ تتقارب لكن $\int_a^\infty |f(x)|dx$ تتباعد فان $\int_a^\infty f(x)dx$ تسمي تقاربا شرطيا.

نظرية:

اذا كانت $\int_a^\infty |f(x)|dx$ تتقارب فان $\int_a^\infty f(x)dx$ تتقارب أيضا.

التكاملات المعتلة من النوع الثاني:

أ-اذا كانت $f(x)$ تصبح فقط غير محدودة عند نقطة النهاية x=a للفترة $a \le x \le b$ حينئذ نعرف

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\in\to 0^+}\int_{a+\in}^b f(x)dx$,اذا كانت النهاية موجودة فان $\int_a^b f(x)dx$ يكون متقارب ,أما اذا كانت النهاية غير موجودة فان $\int_a^b f(x)dx$ يكون متباعد.

و بالمثل اذا كانت $f(x)$ غير محدودة عند نقطة النهاية $x=b$ للفترة $a\le x\le b$ حينئذ تعرف

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\in\to 0^+}\int_a^{b-\in} f(x)dx$, فاذا كانت النهاية موجودة فانه يكون متقارب وعدا ذلك فانه يتباعد.

اذا كانت غير محدودة عند نقطة داخلية $x=x_0$ في الفترة $a\le x\le b$ فإنها تعرف:

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\in_1\to 0^+}\int_a^{x_0-\in_1} f(x)dx+\lim_{\in_2\to 0^+}\int_{x_0+\in_2}^{b} f(x)dx$ فان التكامل يتقارب أو يتباعد تبعا لوجود أو عدم وجود النهاية.

تكاملات معتلة خاصة من النوع الثاني:

1- $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ تتقارب اذا كانت $p<1$ و تتباعد اذا كانت $p\ge 1$.

2- $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ تتقارب اذا كانت $p<1$ و تتباعد اذا كانت $p\ge 1$ و عندما تكون $p\le 0$ التكاملات تكون حقيقية.

نظرية

بفرض أن $\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=A$ فان :-

ا- $\int_a^b f(x)dx$ تتقارب اذا كانت $p<1$, A مقدار محدودا.

ب- $\int_a^b f(x)dx$ تتباعد اذا كانت $p\ge 1$, $A\ne 0$ (حيث A ربما يكون لامتناهي).[4]

نظرية:

بفرض $\lim_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)=B$ فان:

أ- $\int_a^b f(x)dx$ تتقارب اذا كانت $p<1$, B تكون محدودة.

ب- $\int_a^b f(x)dx$ تتباعد اذا كانت $p\ge 1$, $B\ne 0$.

التكاملات المعتلة من النوع الثالث:

و يمكن التعبير عنها بدلالة التكاملات المعتلة من النوع الاول و النوع الثاني و تكون علي الصورة

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx$.

Ex

بين $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ متقارب.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} Tan^{-1}x\Big|_a^b=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$ [7].

التكامل المعتل المحتوية علي بارامتر(التقارب المنتظم):-

لتكن $\phi(\alpha)=\int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ يقال انه تقاربي منتظم في $[\alpha_1,\alpha_2]$ اذا كان لكل $\varepsilon \succ 0$ يمكن ايجاد عدد N يعتمد علي ε لكن ليس علي α بحيث أن $\left|\phi(\alpha)-\int_a^{u} f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon$ لكل $u>N$ و جميع α في $[\alpha_1,\alpha_2]$ و بالتالي $\left|\phi(\alpha)-\int_a^{u} f(x,a)dx\right|=\left|\int_u^{\infty} f(x,\alpha)dx\right|$ التي تشابه المتسلسلات اللانهائية المطلقة للباقي بعد N من الحدود.[5]

اختبارات خاصة للتقارب المنتظم للتكاملات:

1-اختبار (M) ويراستراس:

اذا أمكن ايجاد دالة $M(x)\geq 0$ بحيث أن:

أ- $x<\alpha$, $\alpha_1\leq x\leq\alpha_2$ فان $|f(x,\alpha)|\leq M(x)$.

ب- $\int_a^{\infty} M(x)dx$ تتقارب فان $\int_a^{\infty} f(x,\alpha)dx$ تكون تقاربية مطلقة و منتظمة في $\alpha_1\leq x\leq\alpha_2$.

2-اختبار ديرشلت:

لنفرض أن :

أ- $\Psi(x)$ دالة تناقصية رتبته موجبة تقترب من صفر عندما $x\to\infty$.

ب- $\left|\int_a^{u} f(x,\alpha)dx\right|<p$ لجميع $u>a$, $\alpha_1\leq x\leq\alpha_2$ فان التكامل $\int_a^{\infty} f(x,\alpha)\Psi(x)dx$ تقاربية منتظمة عندما $\alpha_1\leq x\leq\alpha_2$.[4]

بعض الدوال الخاصة:

1-دالة جاما(Gamm function):-

و تعرف بأنها التكامل المعتل $\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$ فيكون متقارب اذا كانت n>0, أما اذا كانت n≤0 فيكون متباعد و يسمي هذا التكامل بتكامل أويلر من النوع الثاني

(Euler integral of the second kind) [5]

خصائص دالة جاما:

1-دالة جاما هي دالة تقاربية لكل 0<x<∞ و تباعديه لكل x≤0 أي يشترط وجود النهاية $\lim_{R\to\infty}\int_0^{R} t^{x-1}e^{-t}dt$ و يكون تقاربي اذا كانت $\Gamma(x)$ تقاربية .

نظرية:

$$\int_0^{\infty} t^a e^{-bt^c}dt=\frac{1}{Cb^{\frac{a+1}{c}}}\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right), \begin{matrix} b,c\in R \\ b,c>0 \\ a>-1 \end{matrix}$$ [5].

البرهان

ليكن $x=bt^c$ فان $t=\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{c}}$, $dt=\frac{1}{bc}\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{c}-1}dx$,كلما $t\to 0$ فان $x\to 0$

و كلما $t\to\infty$ فان $x\to\infty$

$$\therefore \int_0^{\infty} t^a e^{-bt^c}dt=\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{a}{c}}e^{-x}\left(\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{c}-1}}{b^{\frac{1}{c}-1}}\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{b^{\frac{a}{c}}}\right)\left(\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{c}-1}}\right)\int_0^\infty e^{-x}x^{\left(\frac{a}{c}+\frac{1}{c}-1\right)}dx$$

$$=\frac{1}{cb^{\frac{a+1}{c}}}\int_0^\infty e^{-x}x^{\left(\frac{a+1}{c}\right)-1}dx$$

$$=\frac{1}{cb^{\frac{a+1}{c}}}\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)$$

2-يوجد لدالة جاما صيغتين اختزاليتين هما:

الصيغة الاختزالية الاولي لدالة جاما عند x>0 و تكون علي الصورة $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), x>0$, بوضع x+1 بدلا من x في دالة جاما نحصل علي:

$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, x>0$ تصبح $\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^{x}e^{-t}dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R t^x e^{-t}dt$ و بإجراء التكامل بالتجزئة نحصل علي

$\therefore \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

و من أهم صفات دالة جاما سهولة حساب قيمتها في حالة اذا كانت x عددا صحيحا موجبا و لذلك فهي تسمي دالة المضروب(Factorial function).

الصيغة الاختزالية الثانية لدالة جاما في حالة $x<0$ و بشرط أن x ليس عدد صحيح أي $x\neq -1,-2,-3,...$ هي $\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1), \forall x\neq -1,-2,-3,...$.

دالة بيتا:-

و تعرف دالة بيتا علي أنها التكامل المعتل علي الصورة $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, p>0, q>0$

و يرمز لها بالرمز $B(p,q)$ و يسمي التكامل المعتل أيضا بتكامل أويلر من النوع الاول(Euler integral of the first kind).[8]

خصائص دالة بيتا:

1-دالة بيتا دالة تقاربية.

2-دالة بيتا متماثلة (symmetric function) بالنسبة الي p, q أي أن $B(p,q)=B(q,p)$.

3-يمكن كتابة دالة بيتا من خلال الدوال المثلثية $B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi d\varphi$.

4-يمكن كتابة دالة بيتا علي الصورة $B(p,q)=\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1-y)^{p+q}}dy$

برهان الخاصية 4:

نستخدم التعويض $t=\frac{y}{1+y}, dt=\frac{dy}{(1+y)^2}$

$$B(p,q)=\int_0^\infty\left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}\left(1-\frac{y}{1+y}\right)^{q-1}\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$=\int_0^\infty\frac{y^{p-1}}{(1-y)^{p+q}}dy$$

العلاقة بين دالة بيتا ودالة جاما:

يمكن وضع العلاقة بينهما في الصورة الاتية:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, p,q>0 \quad [5].$$

البرهان:

بوضع $t = y^2$ في دالة جاما $\Gamma(p)$ نحصل علي $\Gamma(p) = \int_0^\infty y^{2p-2} e^{-y^2} 2y dy = 2\int_0^\infty y^{2p-1} e^{-y^2} dy$, و بالمثل يمكن اعتبار أن :

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty z^{2q-2} e^{-z^2} 2z dz = 2\int_0^\infty z^{2q-1} e^{-z^2} dz$$

$$\therefore \Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty z^{2q-1} y^{2p-1} e^{-y^2-z^2} dy dz$$

و باستخدام الاحداثيات القطبية $y = \gamma\cos\varphi, z = \gamma\sin\varphi, dydz = \gamma d\gamma d\varphi$ نحصل علي

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty (\gamma\sin\varphi)^{2q-1}(\gamma\cos\varphi)^{2p-1} e^{-\gamma^2} \gamma d\gamma d\varphi$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \sin^{2q-1}(\varphi)\cos^{2p-1}(\varphi) e^{-\gamma^2} \gamma^{2p+2q-2+1} d\gamma d\varphi$$

$$= 4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}(\varphi)\sin^{2q-1}(\varphi) d\varphi\right]\left[\int_0^\infty \gamma^{2(p+q)-1} e^{-\gamma^2} d\gamma\right]$$

باستخدام التعويضات : $dt = 2\gamma d\gamma, t = \gamma^2$ نحصل علي التكامل

$$\int_0^\infty p^{2(p+q)-1} e^{-p^2} dp = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{(p+q)-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma(p+q)$$

$$\because \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}(\varphi)\sin^{2q-1}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}B(p,q)$$

فان $\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\left(\frac{1}{2}\right)B(p,q) + \frac{1}{2}\Gamma(p+q)$

$$\therefore B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

نتيجة:-

$$B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$$

البرهان

$$\because B(p+1,q) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

$$= \frac{p\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q}B(p,q)\text{...........}(1)$$

$$\because B(p,q+1) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}$$

$$= \frac{q\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)}$$

$$= \frac{q}{p+q}B(p,q)\text{...........}(2)$$

و بجمع (1), (2) نحصل علي:

$$\frac{p}{p+q}B(p,q)+\frac{q}{p+q}B(p,q)=\frac{p+q}{p+q}B(p,q)=B(p,q)$$

بعض الامثلة التي توضح ذلك:

مثال

أوجد $\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx$

الحل

$$\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b x^6e^{-2x}dx$$

نوجد الحل أولا باستخدام طرق التكامل المعتاد و نستخدم التكامل بالتجزئة

لنفرض $u=x^6, dv=e^{-2x}dx$ و بالتالي $du=6x^5dx, v=\frac{e^{-2x}}{-2}$

$$\therefore\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx=\frac{x^6e^{-2x}}{-2}+\frac{6}{2}\int_0^\infty x^5e^{-2x}dx............(1)$$

$$I_1=\int_0^\infty x^5e^{-2x}dx$$

لنفرض أن $u=x^5, dv=e^{-2x}dx$ فان $du=5x^4dx, v=\frac{e^{-2x}}{-2}$

$$\int_0^\infty x^5e^{-2x}dx=\frac{-x^5e^{-2x}}{2}+\frac{5}{2}\int_0^\infty x^4e^{-2x}dx............(2)$$

لنفرض أن $u=x^4, dv=e^{-2x}dx$ فان $, du=4x^3dx, v=\frac{e^{-2x}}{-2}$ $\qquad I_2=\int_0^\infty x^4e^{-2x}dx$

$$\therefore\int_0^\infty x^4e^{-2x}dx=\frac{-x^4e^{-2x}}{2}+2\int_0^\infty x^3e^{-2x}dx............(3)$$

لنفرض أن $u=x^3, dv=e^{-2x}dx$ فان $, du=3x^2dx, v=\frac{e^{-2x}}{-2}$ $\qquad I_3=\int_0^\infty x^3e^{-2x}dx$

$$\therefore\int_0^\infty x^3e^{-2x}dx=\frac{-x^3e^{-2x}}{2}+\frac{3}{2}\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx............(4)$$

لـنـفـرض أن $u=x^2, dv=e^{-2x}dx$ فـان $, du=2xdx, v=\frac{e^{-2x}}{-2}$ $\qquad I_4=\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx$

$$\therefore\int_0^\infty x^2e^{-2x}dx=\frac{-x^2e^{-2x}}{2}+\int_0^\infty xe^{-2x}dx............(5)$$

لنفرض أن $u=x, dv=e^{-2x}dx$ فان $, du=dx, v=\frac{e^{-2x}}{-2}$ $\qquad I_5=\int_0^\infty xe^{-2x}dx$

$$\therefore\int_0^\infty xe^{-2x}dx=\frac{-x^2e^{-2x}}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x}dx$$

$$= \frac{-xe^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

بالتعويض عن قيمة I_5 في المعادلة (5) نجد أن:-

$$I_4 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{4}$$

و بالتعويض عن I_4 في المعادلة (4) نجد أن:-

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-2x} dx = \frac{3}{8}$$

و بالتعويض عن قيمة I_3 في المعادلة (3) نجد أن:

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-2x} dx = \frac{3}{4}$$

و نعوض عن قيمة I_2 في المعادلة (2) نجد أن:

$$I_1 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-2x} dx = \frac{15}{8}$$

ثم نعوض عن قيمة I_1 في المعادلة (1) نجد أن:

$$\therefore \int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \frac{45}{8}$$

ثانيا نوجد الحل باستخدام دالة جاما من النظرية:

$$\int_0^{\infty} t^a e^{-bt^c} dt = \frac{1}{Cb^{\frac{a+1}{c}}} \Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} x^4 e^{-2x} dx = \frac{1}{2^7}\Gamma(7) = \frac{45}{8}$$

وفي بعض الامثلة لا نستطيع ايجاد قيمة التكامل المعتل باستخدام طرق التكامل المعتادة لهذا نلجأ الي استخدام دالتي جاما وبيتا لإيجاد قيمته والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال

أوجد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{(1+e^{3x})^2} dx$

الحل

بفرض أن $t = e^{3x}, dt = 3e^{3x} dx$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}}}{(1+t)^2} \frac{dt}{3t} = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}} t^{-1}}{3(1+t)^2} dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{-1}{3}}}{(1+t)^2} dt ....(1)$$

بالمقارنة بين المعادلة (1) و صيغة تكامل بيتا $\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} ....(2)$

نجد أن : $n+m = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} + m = 2 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$, $n-1 = \frac{-1}{3} \Rightarrow n = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

و بالتعويض في المعادلة(2) نجد أن:

$$\frac{1}{3}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{1}=\frac{1}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$$

النتائج

1- التكاملات المعتلة هي تكاملات أحد حدودها غير معرف أو كلاهما غير معرف $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ و نحتاج لا جرائها التخلص من الكمية الغير معرفة بإيجاد نهاية التكامل $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx$, فاذا كانت النهاية متقاربة فان التكامل المعتل متقارب و قيمته تساوي قيمة النهاية, و اذا كانت النهاية غير موجودة فان التكامل المعتل متباعد.

2- دالتي جاما و بيتا من الدوال الخاصة التي عن طريقها تم حساب بعض التكاملات المعتلة لبعض الدوال باستخدام الصيغ الخاصة بها.

3- لتكاملات بيتا عدة صيغ و التي ترجع قيمتها الي العلاقة بين دالتي بيتا و جاما و التي تنص علي:

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

و التي سهلت عملية حساب بعض التكاملات المعتلة و خاصة التي حدها الأعلى غير معرف و التي ترجع للصيغة

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{n-1}dx}{(1+x)^{n+m}}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

4-لحل بعض التكاملات المعتلة نحتاج لطريقتين أو أكثر من طرق التكامل أو اجراء طريقة التكامل و اعادة استخدامها أكثر من مرة للتوصل الي نتيجة .بينما اذا استخدمنا دالة جاما قد نتوصل الي الحل في خطوة واحدة و توجد بعض التكاملات لا نستطيع ايجادها باستخدام طرق التكامل المعتادة.

لذلك دالة جاما و بيتا توفر لنا الوقت و الجهد لإيجاد بعض التكاملات المعتلة.

التوصيات

زيادة البحث حول موضوع التكاملات المعتلة و استخدام دالتي جاما و بيتا في ايجاد الحلول لهذه التكاملات من شأنه اكتشاف نظريات جديدة تجعل طرق الحل أكثر متعة و تشويقا.

المصادر:

1. Shoukralla S. Improper integrals, Beta and Gamma function. Integral Calculus. 2018.
2. Study some applications of the gamma function, Tishreen University Journal.
3. Markabi M, Hussein A, Jijah L. Special functions. 2021.
4. التفاضل و التكامل المتقدم, موراى ر.شبيل, الدار الدولية للاستثمارات الثقافية, مصر, الطبعة السابعة, 2004.
5. الدوال الخاصة, د. الزوام أحمد دلة, د.عمر عبدالونيس و د.محمد عريبي, منشورات جامعة السابع من ابريل , دار الكتب الوطنية,ليبيا,2003.
6. التحليل الحقيقي, د. رمضان جهيمة , دار الكتاب الجديدة المتحدة , لبنان, 2002.
7. كتاب الرياضيات , أحمد حمزة الشيخة, الادارة العامة للمكتبات و النشر, منشورات جامعة سبها, 1996.
8. مسائل الدوال الخاصة:جاما-بيتا-بيسيل-ليجندر,ORINJ.F,1963.